

LEANDRO DE GOIS ORCHAK

**Solução analítica da Teoria da poroelasticidade aplicada ao estudo de
reservatórios de petróleo**

Santos

2019

LEANDRO DE GOIS ORCHAK

**Solução analítica da Teoria da poroelasticidade aplicada ao estudo de
reservatórios de petróleo**

**Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
como requisito parcial para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia de
Petróleo**

Área de concentração: Reservatórios

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Carrion

**Co-orientador: Prof. Dr. Rafael dos
Santos Gioria**

Santos

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catálogo-na-publicação

Orchak, Leandro

Solução analítica da Teoria da poroelasticidade aplicada ao estudo de reservatórios de petróleo / L. Orchak -- São Paulo, 2019.

47 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo.

1.Poroelasticidade 2.Reservatório 3.Petróleo I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Minas e Petróleo II.t.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Ronaldo Carrion, pela orientação e pelo constante estímulo transmitido durante todo o trabalho.

Ao professor Rafael dos Santos Gioria, pela grande ajuda com artigos preciosos e diversas correções importantes.

À minha família, que sempre me apoiou e deu uma boa estrutura, permitindo que eu pudesse me dedicar aos estudos.

E a todos que colaboraram direta ou indiretamente, na execução deste trabalho.

RESUMO

Na engenharia de petróleo, os conhecimentos relativos à área de reservatório são de fundamental importância, uma vez que é o local onde os hidrocarbonetos estão alocados. Além disso, as propriedades do reservatório como porosidade e permeabilidade influem diretamente na produção do óleo. Nesse contexto, uma teoria bastante importante para engenharia de reservatório é a poroelasticidade, que descreve o comportamento acoplado entre os fluidos e sólidos em meios porosos e foi originalmente publicada em uma série de artigos por Biot. Posteriormente, em diversas pesquisas a poroelasticidade foi estudada buscando-se soluções numéricas e analíticas. O presente trabalho aborda a poroelasticidade avaliando uma solução analítica, estudando equações de parcela mecânica e de fluxo e a partir de um estudo de caso desenvolvido por Li et al. (2014), compará-los com trabalho anterior que usou métodos numérico e analítico, além de estudar melhorias na eficiência da solução analítica, levando em conta tempo e precisão.

Palavras-chave: Poroelasticidade. Reservatório. Petróleo. Método Analítico.

ABSTRACT

In petroleum engineering, knowledge of the reservoir area is of paramount importance as it is where hydrocarbons are located. In addition, reservoir properties such as porosity and permeability directly influence oil production. In this context, a very important theory for reservoir engineering is poroelasticity, which describes the coupled behavior between fluids and solids in porous media and was originally published in a series of articles by Biot. Subsequently, in several researches poroelasticity was studied seeking numerical and analytical solutions. The present work approaches the poroelasticity evaluating an analytical solution, studying mechanical and flow plot equations and from a case study developed by Li et al. (2014), compare them with previous work using numerical and analytical methods, and study improvements in analytical solution efficiency, taking into account time and accuracy.

Keywords: Poroelasticity. Reservoir. Petroleum. Analytical Method.

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	Tensão total
σ'	Tensão efetiva
p	Pressão dos poros
α	Coeficiente de Biot
K	Módulo de deformação volumétrica do esqueleto poroso
K_u	Módulo de deformação volumétrica do constituinte sólido do meio poroso
V_x	Velocidade de Darcy para direção x
V_y	Velocidade de Darcy para direção y
V_z	Velocidade de Darcy para direção z
V_p	Volume dos poros
V_t	Volume total do elemento
ϕ	Porosidade
V_s	Velocidade de fluxo na direção s
K_s	Permeabilidade do meio poroso na direção do fluxo s
γ	Peso específico do fluido
μ	Viscosidade do fluido
φ	Potencial do fluxo
ε	Deformação volumétrica

ε_{ij}	Componentes do tensor de deformações
σ_{ij}	Componentes do tensor das tensões totais
ν	Razão de Poisson
G	Módulo de cisalhamento
u	Componente x de deslocamento do solo
v	Componente y de deslocamento do solo
w	Componente z de deslocamento do solo
E	Módulo de Young
ε_V	Tensão volumétrica
K_b	Módulo da compressibilidade do meio poroso
K_s	Módulo da compressibilidade dos grãos sólidos
f_z	Força no corpo devido à gravidade dos fluidos dos poros e do esqueleto sólido
ρ_f	Densidade do fluido dos poros
ρ_s	Densidade dos grãos sólidos
K_f	Módulo de carga do fluido dos poros
δ	Função delta de Dirac
p	Pressão dos poros
λ_f	Fluidez do fluido dos poros
μ_f	Viscosidade do fluido dos poros

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	OBJETIVO.....	12
3	REVISÃO DA LITERATURA.....	13
3.1	TEORIA DE ADENSAMENTO DE TERZAGHI	13
3.2	ACOPLAMENTO ENTRE A TEORIA DE ADENSAMENTO DE TERZAGHI COM POROELASTICIDADE DE BIOT	14
3.3	EQUAÇÕES GORVERNANTES DO PROBLEMA POROELÁSTICO	15
3.3.1	PARCELA DE FLUXO	15
3.3.2	PARCELA MÊCANICA	18
4	MATERIAL E MÉTODOS.....	21
4.1	MATERIAL.....	21
4.2	MÉTODOS	22
4.2.1	MODELOS MATEMÁTICOS	22
4.2.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	28
4.2.3	PROBLEMA.....	31
5	RESULTADOS	34
5.1	VALIDAÇÃO	34
5.2	ESTUDO DE N E Q.....	36
5.3	TEMPO DE EXECUÇÃO E PRECISÃO	40
6	DISCUSSÃO	42
6.1	VALIDAÇÃO	42
6.2	ESTUDO DE N E Q.....	42
6.3	TEMPO DE EXECUÇÃO E PRECISÃO	43
7	CONCLUSÃO.....	45
	REFERÊNCIAS.....	46

1 INTRODUÇÃO

A indústria petrolífera vem crescendo cada vez mais no Brasil, principalmente com a descoberta do pré-sal recentemente, sendo que estudos para entender e potencializar a produção tem ganhado cada vez mais importância. Nesse contexto, é fundamental entender as diferentes etapas e áreas da produção de hidrocarbonetos, incluindo desde a extração do óleo e gás no campo até sua distribuição e comércio.

Dentro dessas áreas, podemos destacar a Engenharia de Reservatório que consiste de um ramo da engenharia de petróleo, em que se aplicam os princípios científicos aos problemas de drenagem que aparecem ao longo do desenvolvimento e produção de reservatórios de petróleo e gás natural, visando alcançar uma alta recuperação econômica.

Nesse contexto, um dos fenômenos fundamentais que merece ser estudado com cuidado é o fluxo de hidrocarbonetos em meios porosos e a produção desses nos campos de petróleo, onde existe grande necessidade de compreender o comportamento mecânico no meio poroso, que deve levar em conta o comportamento do próprio fluido dentro do espaço poroso.

O comportamento desse meio poroso em casos que não apresenta um fluido preenchendo seu interior pode ser modelado considerando-se as deformações das rochas previstas pela teoria da elasticidade e o próprio material poroso pode ser modelado como um material linear elástico. No entanto, em várias áreas o meio se encontra parcialmente ou completamente saturado por um ou mais fluidos, o que pode ser visto nos processos de consolidação de solos, hidrologia, análise sísmica, geotérmica e até mesmo na engenharia biomédica, visto que os tecidos orgânicos são meios porosos preenchidos por vários tipos de fluidos como linfa e sangue. Na indústria de petróleo, os problemas envolvendo meios porosos saturados se situam no campo da engenharia de reservatórios, que tem interesse em entender como o comportamento mecânico e a resistência das rochas são alterados pela saturação de fluidos.

O primeiro a propor um modelo que introduzia o conceito de tensão efetiva foi Terzaghi (1925, apud FRYDMAN, 1996), a fim de descrever o comportamento de solos saturados. Mais tarde, Biot (1941) modificou essa definição de tensão efetiva, visto que o volume poroso pode ser alterado com a pressão de incluídos, sendo que a tensão efetiva passou a ter o seguinte formato.

No entanto, esse conceito de tensão efetiva se limita à solução de problemas estáticos, sendo inadequado para compreensão de deformação do meio poroso relacionada à pressão do fluido em movimento. Na indústria de petróleo, por exemplo, em problemas ligados ao canhoneamento, faturamento hidráulico e estabilidade de poços, a velocidade dos fluidos no meio poroso pode ser bastante elevada, o que faz com que o conceito de tensão efetiva introduza erros consideráveis.

Nesse contexto, Biot (1957) reformulou o conceito de tensão efetiva na análise de meios porosos saturados, formulando com base na elasticidade clássica a Teoria da Poroelasticidade, que é um dos pilares do presente trabalho para o estudo do comportamento de um reservatório de petróleo (meio poroso onde há fluxo de fluidos).

Nessa teoria, não são levadas em conta somente as tensões mecânicas, como também a pressão exercida pelo fluido no interior dos poros. Outros pontos que valem ser ressaltados sobre essa teoria mencionados em Silvestre (2004) é que considera o meio poroso como elástico linear, isotrópico e os poros completamente preenchidos por um fluido. Posteriormente, ainda foram realizados outros estudos, que buscavam entender o comportamento acoplado fluido-sólido, que possuem compressibilidade de meios rochosos relevantes, como é o caso dos reservatórios de petróleo.

Nesse contexto, o trabalho, aqui desenvolvido, busca fazer estudos nessa área, fazendo análises da Teoria da Poroelasticidade em reservatórios de petróleo usando soluções analíticas, fato que o difere da maior parte dos estudos anteriores nessa área, visto que nesses trabalhos são usados métodos numéricos e não analíticos. Dessa forma, busca-se uma metodologia mais simples, com menor

complexidade e que permita respostas mais rápidas e objetivas das equações envolvidas, podendo produzir fundamentos para situações mais complexas. Para isso, foi utilizado o artigo de Li et al. (2014) como base, no qual estão presentes tanto solução analítica quanto numérica para o problema poroelástico.

Além disso, vale ressaltar a diferença entre método analítico e numérico. O primeiro representa soluções baseadas em fórmulas matemáticas, elaboradas geralmente de forma manual, em que são definidas variáveis de entrada para o cálculo de uma ou mais variáveis de saída. Sendo uma metodologia simples, em geral de baixo custo e complexidade, que permite uma resposta rápida e direta, motivo pelo qual foi escolhida para solução do problema poroelástico no presente trabalho.

Já o método numérico é um algoritmo formado por um número finito de operações envolvendo apenas números, como operações aritméticas elementares e cálculo de funções. Além disso, não utilizar tantas simplificações quando o método analítico enquadrando o problema em condições próximas a situação real, sendo um dos principais motivos pelo qual é muito utilizado na solução de problemas poroelásticos.

2 OBJETIVO

O estudo desenvolvido tem como objetivo principal obter solução analítica da teoria da poroelasticidade, cuja aplicação ocorre em reservatórios de petróleo. Além disso, o trabalho visa também comparar esses resultados com estudo de Li et al. (2014) onde foram usadas soluções numérica e analítica. Outro objetivo do trabalho é estudar a solução analítica utilizada, transformada finita de Fourier e transformada de Laplace, analisando seus resultados, quanto à precisão que se pode obter e o tempo de processamento para a obtenção da solução do problema. Sendo estudados os parâmetros n e q presentes nas soluções analíticas, levando em consideração o custo computacional, exatidão e precisão.

3 REVISÃO DA LITERATURA

3.1 TEORIA DE ADENSAMENTO DE TERZAGHI

A Teoria da Poroelasticidade se fundamenta em estudos relativamente antigos, tendo seu início a partir do trabalho de Terzaghi (1925, apud ANFLOR, 2016). Atualmente essa produção científica pode ser considerada como o começo da mecânica dos solos como novo ramo da ciência na engenharia.

Segundo Anflor (2016), devido à baixa taxa de fluidos no interior do solo (espaços vazios), ocorre o fenômeno de adensamento do mesmo, que pode ser considerada como a queda de volume, sendo que diversos cientistas estudaram esse fenômeno, contudo quem obteve real destaque nesse campo foi Terzaghi, que é considerado o “pai da mecânica dos solos”.

Para descrever o comportamento de solos saturados, Terzaghi (1925, apud FRYDMAN, 1996) foi o primeiro a propor um modelo que introduzia o conceito de tensão efetiva, que pode ser visto na equação (1), onde σ é a tensão total, σ' é a tensão efetiva e p é a pressão dos poros.

$$\sigma = \sigma' + p \quad (1)$$

O solo, ao ser solicitado por uma pressão, tem seu volume reduzido devido a três possíveis causas: a saída de fluido dos espaços vazios, compressão dos grãos e compressão dos fluidos presentes nos vazios. Nesse contexto, Terzaghi (1925, apud FRYDMAN, 1996) e Terzagui e Frolich (1936, apud FRYDMAN, 1996) apresentaram análises do comportamento de uma camada de solo compressível, com condições de deformação unidimensional e fluxo vertical.

3.2 ACOPLAMENTO ENTRE A TEORIA DE ADENSAMENTO DE TERZAGHI COM POROELASTICIDADE DE BIOT

Qualquer corpo poroso tem sua estrutura interna similar a um sólido homogêneo, sendo que se difere pelo fato de que em sua formação existem grãos que não se encaixam totalmente, resultando em espaços vazios denominados poros, sendo que essas áreas podem estar preenchidas ou não por fluídos como óleo, água e gás. Já os grãos que estão consolidados e unidos por um agente cimentante são chamados de matriz da rocha. Segundo Donaldson e Tiab (2004), a porosidade de uma rocha pode ser definida como a razão entre o volume poroso e o volume total (volume poroso mais volume da matriz).

Na teoria da poroelasticidade, os poros são considerados totalmente preenchidos e o meio poroso é assumido como elástico linear. Nesse contexto, as considerações feitas nos estudos de Biot (1941) alteraram a equação (1) proposta por Terzaghi, levando a equação (2), se considerar o meio como isotrópico, sendo que a tensão efetiva passou a ter o seguinte formato.

$$\sigma = \sigma' + \alpha \times p \quad (2)$$

Onde α é denominado coeficiente de Biot e pode ser calculado da seguinte forma.

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_u} \quad (3)$$

Sendo K e K_u os módulos de deformação volumétrica do esqueleto poroso e do constituinte sólido do meio poroso, respectivamente.

Além disso, a síntese elaborada por Biot (1941) considera os poros totalmente ocupados por um fluído. Suas equações governantes tem origem nas equações de equilíbrio, compatibilidade deformação-deslocamento, relação tensão-deformação da teoria da elasticidade da lei de Darcy. Essa síntese partindo das equações mencionadas será discutida de forma sucinta a seguir.

3.3 EQUAÇÕES GORVERNANTES DO PROBLEMA POROELÁSTICO

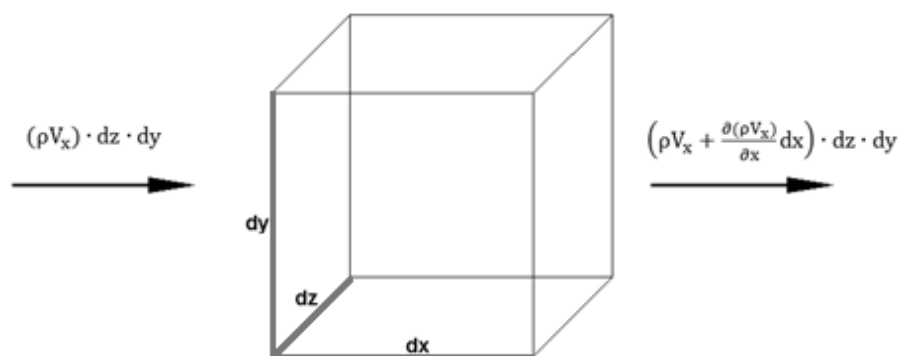
Segundo Lopes (2016), a teoria da poroelasticidade permite acoplar os efeitos de fluxo interno de fluidos com respostas mecânicas. Dessa forma, podem-se dividir as equações governantes do problema poroelástico em duas parcelas: de fluxo e mecânica.

3.3.1 PARCELA DE FLUXO

A parcela de fluxo é obtida combinando-se as equações de continuidade, lei de Darcy e equações de estado, a qual leva em conta a análise de tensões.

A síntese da parcela de fluxo pode ser iniciada a partir da equação de continuidade, onde o princípio físico da conservação de massa é satisfeito, sendo que essa equação pode ser usada para descrever como ocorre a variação de massa no interior do meio poroso devido ao fluxo. Para isso, adota-se um volume de controle de dimensões infinitesimais dx , dy e dz , fazendo balanço de massa para a direção x e usa-se o conceito da velocidade de Darcy. Existe o caso mais geral, onde se considera fluxo de entrada nas direções x , y e z e saída desse fluxo nas faces opostas. Para exemplificar, a Figura 1 ilustra esse fluxo para a direção x .

Figura 1 - Fluxo de fluido para a direção x .



Fonte: **ARAUJO, 2005.**

Na sequência, ao se fazer o balanço de massa para as três direções, a massa que entra menos a que sai do volume de controle em questão é igual à variação de massa, que pode ser expresso pela seguinte equação:

$$\left\{ \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right\} \times dx \times dy \times dz = - \frac{\partial(\rho V_p)}{\partial t} \quad (4)$$

Onde V_x , V_y , V_z são as velocidades de Darcy para as direções x, y e z.

Como Biot assume que o espaço poroso está completamente preenchido por fluidos, a variação do volume de poros é exatamente igual à variação do volume dos fluidos. Tem-se também, a seguinte definição de porosidade:

$$\Phi = \frac{V_p}{V_t} \quad (5)$$

Sendo:

V_p : Volume dos poros.

V_t : Volume total do elemento.

Na sequência, substituindo a equação (5) em (3), obtém-se a seguinte equação (6), que é denominada equação da continuidade, sendo que a variação de massa no meio poroso é igual à diferença entre a massa que entra e que sai nas três direções do volume de controle.

$$\left\{ \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial(\Phi \rho)}{\partial t} \quad (6)$$

Feita essa análise da equação da continuidade, a próxima etapa é a inclusão da equação de Darcy. A partir de experimentos, uma lei que descreve o comportamento de fluidos em meios porosos sob regime laminar foi elaborada por

Darcy (1856), onde correlaciona os gradientes de potencial envolvidos com a velocidade de fluxo, seguindo a seguinte equação:

$$V_s = -\frac{K_s \gamma}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (7)$$

Sendo:

s: A trajetória de um fluxo qualquer.

K_s : Permeabilidade do meio poroso na direção do fluxo.

γ : Peso específico do fluido.

φ : Potencial do fluxo.

μ : viscosidade do fluido.

Nessa equação, os fluidos sempre são deslocados dos pontos de maior potencial para os de menor potencial e o fator que propicia esse deslocamento é exatamente essa diferença de potencial. Ainda usando a lei de Darcy, as velocidades aparentes podem ser descritas nas três direções pelas seguintes equações:

$$V_x = -\frac{K_x \gamma}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (8)$$

$$V_y = -\frac{K_y \gamma}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (9)$$

$$V_z = -\frac{K_z \gamma}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (10)$$

Essas três equações podem ser introduzidas na equação (6), resultando na seguinte expressão:

$$\left\{ \frac{\partial(\rho \frac{K_x \gamma}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \frac{K_y \gamma}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \frac{K_z \gamma}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z})}{\partial z} \right\} = \frac{\partial(\Phi \rho)}{\partial t} \quad (11)$$

3.3.2 PARCELA MÊCANICA

Terminado a análise da parcela de fluxo, tem-se que estudar também a parcela mecânica dos problemas de poroelasticidade. Para isso deve-se combinar a relação tensão-deformação, relação deslocamento-deformação, equações de equilíbrio em termos de tensões efetivas e pressão de poros, levando em conta o princípio de tensões efetivas de Terzaghi (1925, apud FRYDMAN, 1996). Chega-se, assim, a equação de equilíbrio em termos de deslocamento e pressão de poros.

As equações de equilíbrio estão dispostas a seguir, nas quais não são consideradas as forças de corpo e nem os efeitos de inércia:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

As relações de deformação-deslocamento são dadas a seguir pelas equações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (19)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (20)$$

Devido às hipóteses de isotropia, a pressão de fluidos afeta apenas deformações normais e de uma mesma quantidade. Outro fato é que as deformações cisalhantes são funções apenas das tensões cisalhantes independente da pressão dos poros p . Além disso, o uso das equações de 15 a 20 resulta na permissão de pequenas deformações.

Usando o sistema de equações formado por 12 a 20, pode-se chegar às seguintes equações:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \nu\varepsilon - \alpha p \quad (21)$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \nu\varepsilon - \alpha p \quad (22)$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \nu\varepsilon - \alpha p \quad (23)$$

Sendo:

ε_{ij} : Componente do tensor das deformações.

σ_{ij} : Componente do tensor das tensões totais.

ν : Razão de Poisson

G : Módulo de cisalhamento.

α : Coeficiente de Biot.

O parâmetro de Lamé, que foi mencionado anteriormente, se relaciona com outras constantes elásticas seguindo a seguinte fórmula:

$$\nu = \frac{3cK}{1+c} = \frac{2cG}{1-2c} = K - \frac{2}{3}G \quad (24)$$

Sendo:

K: Módulo de deformação volumétrica drenado do meio poroso.

Finalmente, ao substituir as equações 21 a 23 nas equações de equilíbrio 12 a 14, chega-se nas seguintes equações:

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

Sendo:

u, v, w: Componentes do vetor deslocamento.

4 MATERIAL E MÉTODOS

A fim de se obter uma visualização das soluções analíticas e dar suporte nas interpretações, usou-se como ferramenta o MATLAB.

Como se trata da busca por soluções analíticas, muitas simplificações devem ser feitas (como será visto adiante) para adequar o modelo sem, no entanto, perder a essência do comportamento físico do problema. O que faria com que perdessem seu valor na previsão dos resultados ligados à poroelasticidade, visto que as simplificações afastariam bastante o modelo das características reais das formações, comprometendo os resultados. Assim, deve-se buscar um meio termo no aspecto simplificações, de forma a tornar o modelo viável do ponto de vista analítico e próximo das condições reais. As simplificações foram as mesmas adotadas por Li (2014)

Vale ressaltar que o estudo da solução analítica aqui desenvolvida visa obter resultados exatos que podem ser utilizados para validação de métodos numéricos, já que a maior parte dos trabalhos desenvolvidos nessa área faz uso de métodos numéricos, diferentemente do artigo de Li et al. (2014) usado como base para implementação do código, onde uma das soluções faz uso do método analítico.

Outro ponto de destaque do trabalho desenvolvido aqui é não se limitar a implementar o código baseado em trabalhos anteriores, como também torná-lo mais eficiente, reduzindo o tempo que o mesmo demora para rodar, contudo, sem reduzir a precisão dos resultados.

4.1 MATERIAL

A linguagem de programação adotada é o MATLAB, que segundo Chapman (2011), é um programa de computador de uso específico, que é otimizado a fim de executar cálculos específicos e de engenharia. Além disso, é bastante fácil resolver problemas técnicos em MATLAB, já que oferece uma ampla biblioteca de funções predefinidas.

No total foram gerados quatro códigos com cerca de 100 linhas cada um (levando em conta as linhas de comentários) que terão seu conteúdo discutido à frente, conforme as equações usadas forem apresentadas. No mais, o código usa uma série de estruturas básicas e bem conhecidas pelos programadores que fazem uso da linguagem em questão, como *input('string')* e *while*.

4.2 MÉTODOS

4.2.1 MODELOS MATEMÁTICOS

O método aplicado foi, como mencionado anteriormente, a obtenção de cálculos e gráficos utilizando o MATLAB.

Como se trata da busca por soluções analíticas, algumas hipóteses devem ser estudadas primeiramente. Essas hipóteses têm como objetivo simplificar o modelo e tornar viável a aplicação de soluções analíticas.

Os resultados obtidos na saída das simulações foram analisados e comparados com os resultados de Li et al.(2014) que fez uso de métodos numéricos e analíticos. Então, os resultados analíticos exatos obtidos foram estudados avaliando a sua precisão.

Como base foi utilizado um artigo com soluções analíticas para meio poroelástico em um meio finito bidimensional, o qual terá suas hipóteses, condições de contorno e equações expostas a seguir. No artigo em questão Li et al. (2014) utilizou as seguintes hipóteses visando uma maior simplicidade para as equações:

- a) O meio poroso é saturado por apenas um fluido;
- b) O fluxo segue a Lei de Darcy;
- c) O meio poroso é isotrópico;
- d) O fluxo e a deformação são considerados quase que completamente estáticos;
- e) A tensão de tração é positiva.

A partir dessas hipóteses, as equações de Biot se tornam as seguintes (bastante semelhantes às equações 25, 26 e 27):

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + f_z = 0 \quad (30)$$

Já a equação geral de pressão dos poros no campo é a seguinte:

$$\nabla \cdot \left[\frac{k_f}{\mu_f} (\nabla p - p_f \vec{g}) \right] + q = \alpha \frac{\partial \varepsilon V}{\partial t} + \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{\alpha - \phi}{K_s} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (31)$$

Nessa equação, u , v e w representam os componentes de deslocamento do solo x , y e z , respectivamente.

G é o módulo de cisalhamento e pode ser calculado da seguinte forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (32)$$

E é o módulo de Young e ν é a razão de Poisson.

A tensão volumétrica ε_v é calculada da seguinte forma:

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (33)$$

O coeficiente poroelástico de Biot é α :

$$\alpha = 1 - \frac{K_b}{K_s} \quad (34)$$

Sendo que K_b é o módulo da compressibilidade do meio poroso, o qual é calculado da seguinte forma:

$$K_b = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (35)$$

K_s é o módulo da compressibilidade dos grãos sólidos e p é a pressão dos poros.

Além disso, f_z é a força no corpo devido à gravidade dos fluidos dos poros e do esqueleto sólido, sendo que pode ser calculada da seguinte forma:

$$f_z = [\phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s] \cdot g \quad (36)$$

Nessa equação, ϕ é a porosidade, ρ_f é a densidade do fluido dos poros, ρ_s é a densidade dos grãos sólidos e g é a aceleração da gravidade.

A intensidade por unidade de volume de carga é q e K_f é o módulo de carga do fluido dos poros.

Como em muitos casos o efeito da gravidade pode ser descartado (muito pequeno em relação aos demais valores), o conjunto de equações 28 a 31 se torna:

$$G \nabla^2 u + \frac{G}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (37)$$

$$G \nabla^2 v + \frac{G}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (38)$$

$$G \nabla^2 w + \frac{G}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (39)$$

$$\nabla^2 p = \frac{\alpha}{\lambda_f} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial t} + \frac{1}{X} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\lambda_f} q \quad (40)$$

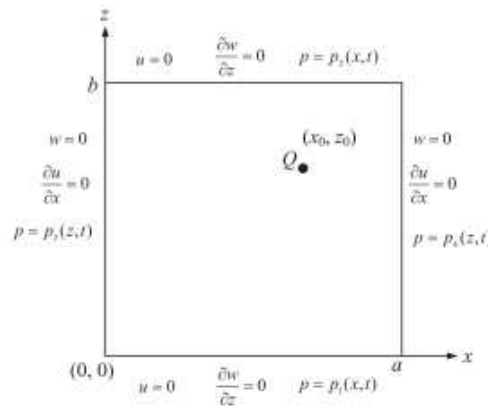
Sendo que:

$$\lambda_f = \frac{k_f}{\mu_f} \quad (41)$$

$$X = \frac{\lambda_f}{\phi C_t} \quad (42)$$

O problema de poroelasticidade foi considerado então no artigo (Li, 2014) como sendo induzido por um ponto de coleta em um domínio retangular finito, o qual é mostrado na Figura 2 a seguir. Dentro do domínio é alocado um ponto em uma posição (x_0, z_0) , que indica uma possível fonte/sorvedouro de massa, ou seja, existência de um poço.

Figura 2 - Meio poroso finito esquematizado com tamanhos a por b .



Fonte: LI, 2014.

Como pode ser visto, o problema pode ser considerado como um plano de tensão poroelástico no plano $x - z$. Sendo assim, as equações correspondentes são (já vistas anteriormente):

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (43)$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\alpha}{\lambda_f} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial t} + \frac{1}{X} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\lambda_f} q \quad (45)$$

Sendo que q é o fluxo volumétrico dos fluidos do poro e pode ser calculado da seguinte forma:

$$q = q_0(t) \cdot \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (46)$$

Nessa equação, δ é a função delta de Dirac.

Na sequência, fazendo a seguinte substituição $\varepsilon_V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$ e dividindo tudo por G , nas equações 43 e 44, tem-se:

$$(m + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (47)$$

$$(m + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (48)$$

Sendo que $m = \frac{1}{1-2\nu}$.

Por fim, foram estabelecidas as condições de contorno do domínio, as quais se encontram também na Figura 2. Para a pressão de poro foi definido as equações 49, 50, 51 e 52 a seguir.

$$p = p_1(x, t), \text{ em } z = 0 \quad (49)$$

Dessa forma, para $z=0$ (superfície inferior) o valor da pressão de poro varia apenas em função do tempo e da coordenada x .

$$p = p_2(x, t), \text{ em } z = b \quad (50)$$

Assim, para $z=b$ (superfície superior) o valor da pressão de poro varia apenas em função do tempo e da coordenada x .

$$p = p_3(z, t), \text{ em } x = 0 \quad (51)$$

De forma análoga à equação 49, para $x=0$ o valor da pressão de poro varai apenas em função do tempo e da coordenada z .

$$p = p_4(z, t), \text{ em } x = a \quad (52)$$

Também para $x=a$, o valor da pressão de poro só varia em função do tempo e da coordenada z .

Já as condições de contorno para o deslocamento do campo são dadas pelas equações 53 e 54:

$$u = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ em } z = 0 \text{ e } z = b \quad (53)$$

Assim, considera-se que a componente de deslocamento do eixo x e a variação da componente de deslocamento do eixo z são ambas iguais à zero nas superfícies inferior e superior.

$$w = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (54)$$

De forma semelhante, para $x=0$ e $x=a$, tem-se que a componente de deslocamento do eixo z e a variação da componente de deslocamento do eixo x são ambas iguais à zero.

Pode-se perceber que as condições de fronteirado do deslocamento do campo foram escolhidas com cuidado (equações 53 e 54) pelo autor, a fim de que se obtivesse uma situação favorável para aplicação da transformação finita de Fourier e auxiliar no processo de simplificação.

Além disso, têm-se as seguintes equações para as condições iniciais para pressão de poros e deslocamento do campo:

$$u(x, z, t = 0) = 0, w(x, z, t = 0) = 0 \text{ e } p(x, z, t = 0) = 0 \quad (55)$$

Essas foram as condições iniciais utilizadas por Li et al.(2014), considerando que parte do equilíbrio. Essas condições iniciais ajudam na simplificação das equações governantes da transformada de Laplace.

4.2.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

O procedimento realizado foi a aplicação da transformação finita de Fourier e a transformação de Laplace para se calcular o valor exato do problema exposto anteriormente . As variáveis transformadas se encontram a seguir:

$$\bar{u}(n, q, s) = LC_{xn}S_{zq}\{u(x, z, t)\} \quad (56)$$

$$\bar{w}(n, q, s) = LS_{xn}C_{zq}\{w(x, z, t)\} \quad (57)$$

$$\bar{p}(n, q, s) = LS_{xn}S_{zq}\{p(x, z, t)\} \quad (58)$$

Nessas equações, a transformação de Laplace, transformações de cossenos finitos e transformações de senos finitos são representadas, respectivamente, por $L\{\}$, $C_{xn}\{\}$, $C_{zq}\{\}$, $S_{xn}\{\}$ e $S_{zq}\{\}$.

Que estão definidas da seguinte forma:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (59)$$

$$C_{xn}\{f(x)\} = \int_0^a f(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (60)$$

$$C_{zq}\{f(z)\} = \int_0^b f(z) \cos(\lambda_q z) dz \quad (61)$$

$$S_{xn}\{f(x)\} = \int_0^a f(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad (62)$$

$$S_{zq}\{f(z)\} = \int_0^b f(z) \sin(\lambda_q z) dz \quad (63)$$

Sendo que λ_n e λ_q foram pontos chaves do presente trabalho, uma vez que a precisão da solução analítica foi estudada variando-se os valores máximos de n e q .

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (64)$$

$$\lambda_q = \frac{q\pi}{b}, \quad q = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (65)$$

Na sequência, aplicando $LS_{xn}S_{zq}\{45\}$, $LC_{xn}S_{zq}\{47\}$ e $LS_{xn}C_{zq}\{48\}$ e levando em conta as condições estabelecidas em 49 à 55 e depois resolvendo as equações diferenciais ordinárias, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{u}(n, q, s) = & B_1 \frac{\alpha(\alpha^2 \lambda_q^2 s + G\lambda_f(\lambda_q^2(m+1)(\lambda_q^2 + s/X) + \lambda_n^2(\lambda_q^2(m+1) + s/X)))}{G\tilde{\lambda}^2(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \quad (66) \\ & + B_2 \frac{-\alpha\lambda_n\lambda_q(\alpha^2 s + G\lambda_f((m+1)\tilde{\lambda} + ms/X))}{G\tilde{\lambda}^2(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \\ & + \bar{q} \frac{-\alpha\lambda_n}{\tilde{\lambda}(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}(n, q, s) \quad (67) \\ = & B_1 \frac{-\alpha\lambda_n\lambda_q(\alpha^2 s + G\lambda_f((m+1)\tilde{\lambda} + ms/X))}{G\tilde{\lambda}^2(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \\ & + B_2 \frac{\alpha(\alpha^2 \lambda_n^2 s + G\lambda_f(\lambda_n^2(m+1)(\lambda_q^2 + s/X) + \lambda_n^4(m+1) + \lambda_n^4(m+1) + \lambda_q^2 s/X))}{G\tilde{\lambda}^2(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \\ & + \bar{q} \frac{-\alpha\lambda_q}{\tilde{\lambda}(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}(n, q, s) = & B_1 \frac{\lambda_n(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f \tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \\
& + B_2 \frac{\lambda_q(\alpha^2 s + G\lambda_f(m+1)\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda}(\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X))} \\
& + \bar{q} \frac{G(m+1)}{\alpha^2 s + G(m+1)\lambda_f(\tilde{\lambda} + s/X)}
\end{aligned} \tag{68}$$

Sendo que:

$$\tilde{\lambda} = \lambda_n^2 + \lambda_q^2 \tag{69}$$

$$\bar{q}(n, q, s) = LS_{xn}S_{zq}\{q(x, z, t)\} \tag{70}$$

$$B_1 = \bar{p}_3 - (-1)^n \bar{p}_4 \tag{71}$$

$$B_2 = \bar{p}_1 - (-1)^q \bar{p}_2 \tag{72}$$

Onde:

$$\bar{p}_1(n, s) = LS_{xn}\{p_1(x, t)\} \tag{73}$$

$$\bar{p}_2(n, s) = LS_{xn}\{p_2(x, t)\} \tag{74}$$

$$\bar{p}_3(q, s) = LS_{zq}\{p_3(z, t)\} \tag{75}$$

$$\bar{p}_2(q, s) = LS_{zq}\{p_4(z, t)\} \tag{76}$$

Por fim, aplicando-se inversões triplas nas equações 66 a 68, obtêm-se as equações a seguir, as quais são a solução analítica do problema definido no espaço físico.

$$u(x, z, t) = \frac{2}{ab} \sum_{q=1}^{\infty} \bar{u}(0, q, t) \sin(\lambda_q z) + \frac{4}{ab} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}(n, q, t) \cos(\lambda_n x) \sin(\lambda_q z) \tag{77}$$

$$w(x, z, t) = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(n, 0, t) \sin(\lambda_n x) + \frac{4}{ab} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(n, q, t) \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_q z) \tag{78}$$

$$p(x, z, t) = \frac{4}{ab} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}(n, q, t) \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_q z) \quad (79)$$

Onde:

$$\bar{u}(n, q, t) = L^{-1}\{\bar{u}(n, q, s)\} \quad (80)$$

$$\bar{w}(n, q, t) = L^{-1}\{\bar{w}(n, q, s)\} \quad (81)$$

$$\bar{p}(n, q, t) = L^{-1}\{\bar{p}(n, q, s)\} \quad (82)$$

Além dessa solução analítica, Li (2014) também desenvolveu uma solução numérica usando o método da diferença finita, a qual não será aqui abordada em detalhes para não se afastar dos objetivos do trabalho.

4.2.3 PROBLEMA

As soluções analítica e numérica de Li et al. (2014) foram empregadas para a solução da situação que será descrita a seguir.

Um aquífero confinado, saturado e com um ponto, indicando a presença de poço, como o descrito em 4.2.1 e ilustrado pela Figura 2 é pego como modelo. O tamanho da direção y foi supostamente definido como muito maior que as outras duas direções. Dessa forma, o estresse associado com a direção y é muito menor que aqueles relativos à cortes transversais x - z , sendo assim, podemos desprezar os valores de estresse na direção y e a situação descrita passa a ser um problema poroelástico de tensões apenas à cortes transversais x - z .

Além disso, visando simplificar a solução, foram consideradas pressões iguais à zero nas arestas do modelo ($p_1=p_2=p_3=p_4=0$). As propriedades mecânicas adotadas estão expostas na seguinte Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Propriedades mecânicas do problema.

Parâmetros	Valores
G/MP_a	2000
$\lambda_f/(m^2/s.MP_a^{-1})$	0,296
$X/(m^2/s)$	1503,3
α	0,946
m	2
a/m	8
b/m	4
x_0/m	4
z_0/m	2
$q_0/(m^2/s)$	0,03

Para a solução analítica, deve-se implementar $LS_{xn}S_{zq}\{46\}$, que resulta na seguinte equação:

$$\bar{q}(n, q, s) = -\frac{q_0 \sin(\lambda_n x_0) \sin(\lambda_q z_0)}{s} \quad (83)$$

Além disso, devido às pressões zeradas nas fronteiras, B_1 e B_2 se tornam iguais à zero. Finalmente substituindo 83 nas equações 66 a 68 e fazendo as inversões de Laplace, tem-se:

$$\bar{u}(n, q, t) = \frac{a \lambda_n q_0 \sin(\lambda_n x_0) \sin(\lambda_q z_0) (1 - e^{-\frac{G \lambda_f \tilde{\lambda} (m+1)t}{\alpha^2 + G \lambda_f (m+1)/X}})}{G \lambda_f (m+1) \tilde{\lambda}^2} \quad (84)$$

$$\bar{w}(n, q, t) = \frac{a \lambda_q q_0 \sin(\lambda_n x_0) \sin(\lambda_q z_0) (1 - e^{-\frac{G \lambda_f \tilde{\lambda} (m+1)t}{\alpha^2 + G \lambda_f (m+1)/X}})}{G \lambda_f (m+1) \tilde{\lambda}^2} \quad (85)$$

$$\bar{p}(n, q, t) = -\frac{q_0 \sin(\lambda_n x_0) \sin(\lambda_q z_0) (1 - e^{-\frac{G \lambda_f \tilde{\lambda} (m+1)t}{\alpha^2 + G \lambda_f (m+1)/X}})}{\lambda_f \tilde{\lambda}} \quad (86)$$

No presente trabalho, o código desenvolvido em MATLAB utilizou como base às equações 78 e 85.

Como primeira etapa buscou-se validar o código, gerando gráficos com os resultados obtidos e comparando os mesmos com os resultados gráficos presentes no artigo de Li (2014).

Feita a validação, passou-se a estudar a precisão da solução em função dos valores máximos que n e q podem ter. Na equação 78 os somatórios se iniciam em q e n iguais a um e vão até o infinito, o que é inviável no mundo real, sendo necessário um estudo levando em conta precisão e tempo de processamento. Assim, procurou-se encontrar o $q_{\text{máx}}$ e $n_{\text{máx}}$ ideal, podendo adaptar a equação 78 para o seguinte formato:

$$w(x, z, t) = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{n_{\text{máx}}} \bar{w}(n, 0, t) \sin(\lambda_n x) + \frac{4}{ab} \sum_{q=1}^{q_{\text{máx}}} \sum_{n=1}^{n_{\text{máx}}} \bar{w}(n, q, t) \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_q z) \quad (87)$$

5 RESULTADOS

5.1 VALIDAÇÃO

No artigo, Li et al.(2014) expõe em gráficos os resultados analítico e numérico para duas situações envolvendo o problema descrito anteriormente. Na Figura 3, foi plotado os valores de w_d , deslocamento vertical adimensional, no centro da superfície superior ($x=0,5a$, $z=b$) em relação ao tempo adimensional t_d .

Já na Figura 4, o valor de w_d na superfície superior é dado em função da coordenada adimensional x_d . Os valores não dimensionais de w_d , t_d e x_d são dados pelas seguintes equações :

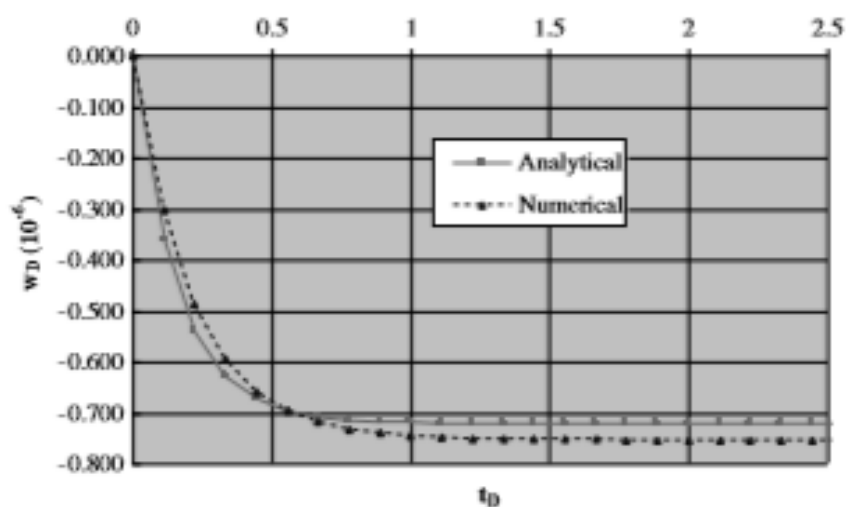
$$x_d = \frac{x}{a} \quad (87)$$

$$w_d = \frac{w}{b} \quad (88)$$

$$t_d = \lambda_f \frac{(m+1)G}{b^2} t \quad (89)$$

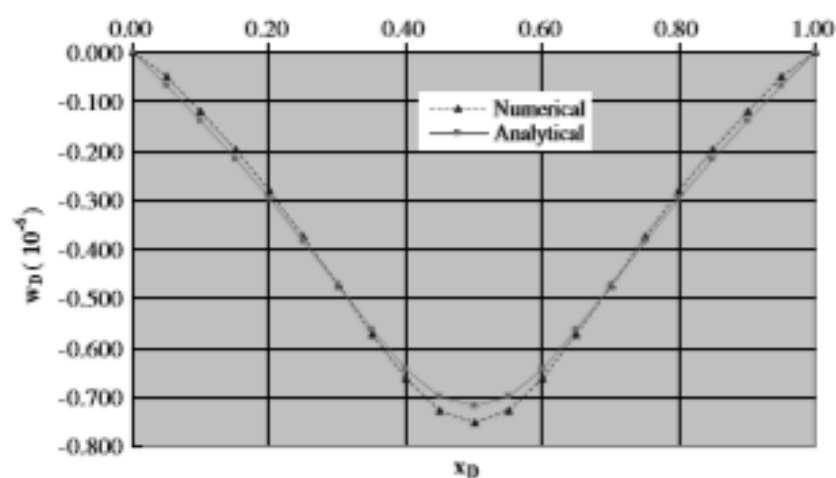
Os resultados analíticos e numéricos obtidos por Li et al.(2014) se encontram a seguir:

Figura 3 - Curva de w_D versus t_D no ponto central da superfície superior.



Fonte: LI, 2014.

Figura 4 - Curva de w_D versus x_D na superfície superior.



Fonte: LI, 2014.

No presente trabalho foi elaborado solução analítica em MATLAB para obtenção dos pontos referentes a situação retratada na Figura 3 e um outro código similar referente a situação da Figura 4. Os resultados desses códigos encontram-se expostos, respectivamente, nas Figuras 5 e 6.

Para desenvolvimento desses códigos utilizou-se como base as equações 85 e 87. Além disso, considerou-se $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ com valor igual a 1000.

Figura 5 – Solução analítica de w_d versus td no ponto central da superfície superior (0,5 a, b).

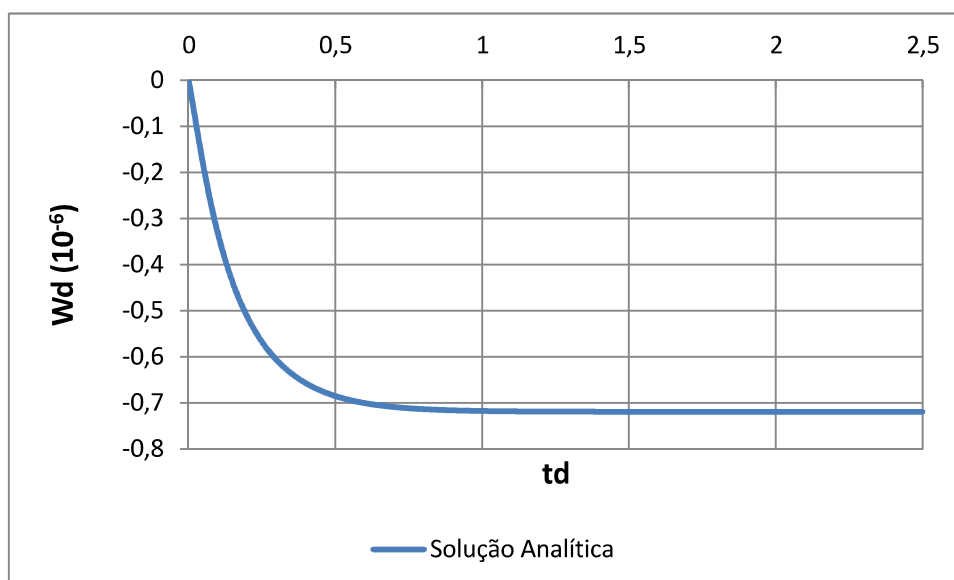
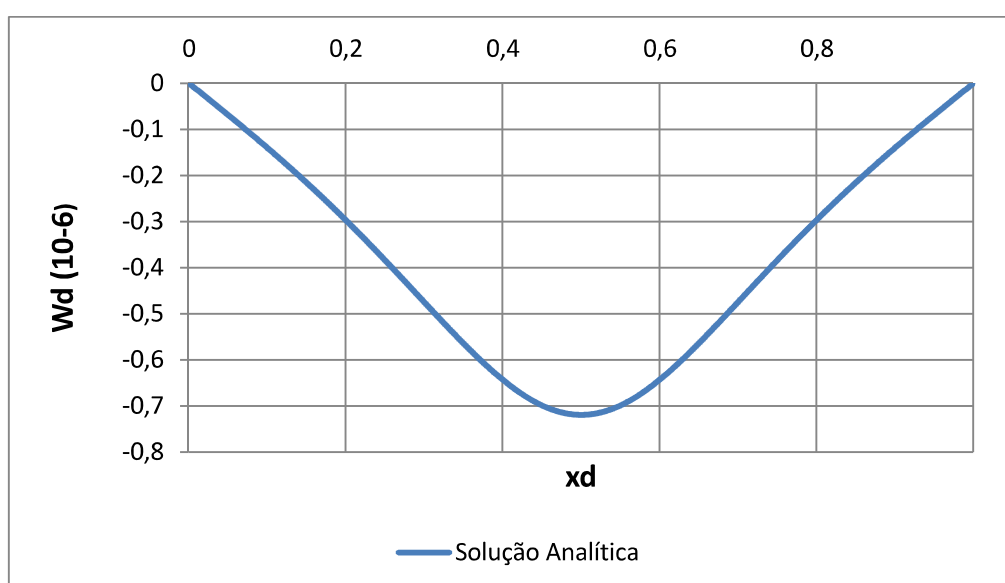


Figura 6 - Solução analítica de w_d versus x_d na superfície superior.



5.2 ESTUDO DE N E Q

Na sequência, foi estudado como o valor escolhido para $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ afetam o resultado final da solução analítica. Assim, primeiro buscou-se estudar $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ separadamente. Para isso fixou-se $n_{\text{máx}}$ igual a 1 e variou-se o valor de $q_{\text{máx}}$. Além disso foi traçado uma curva com $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ igual a 1000 (como parâmetro, já que

para esse valor os resultados coincidiram com o trabalho de Li et al.(2014). Chegando-se, assim, nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 - Solução analítica de w_d versus td no ponto central da superfície superior (0,5 a, b) para $n_{máx}$ igual a 1 e $q_{máx}$ variando.

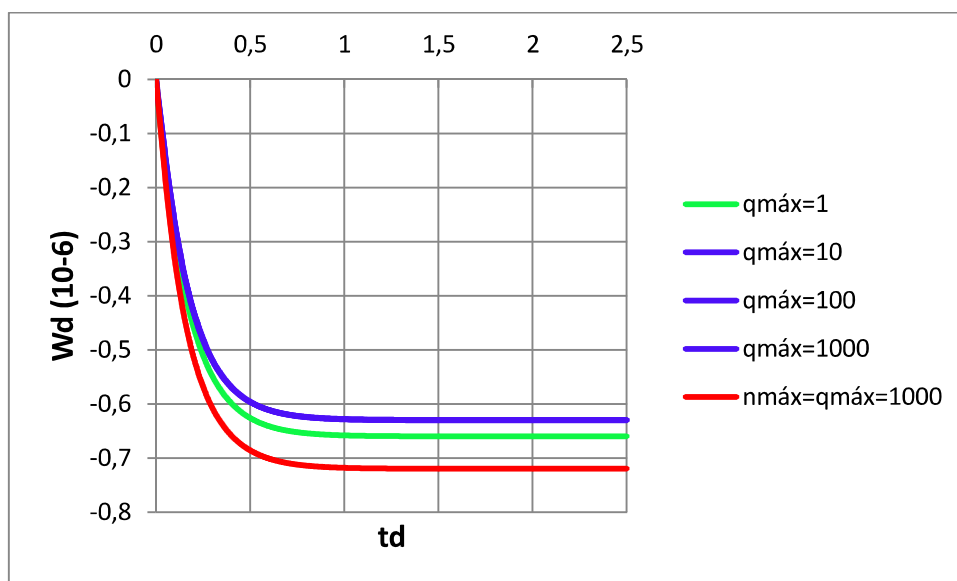
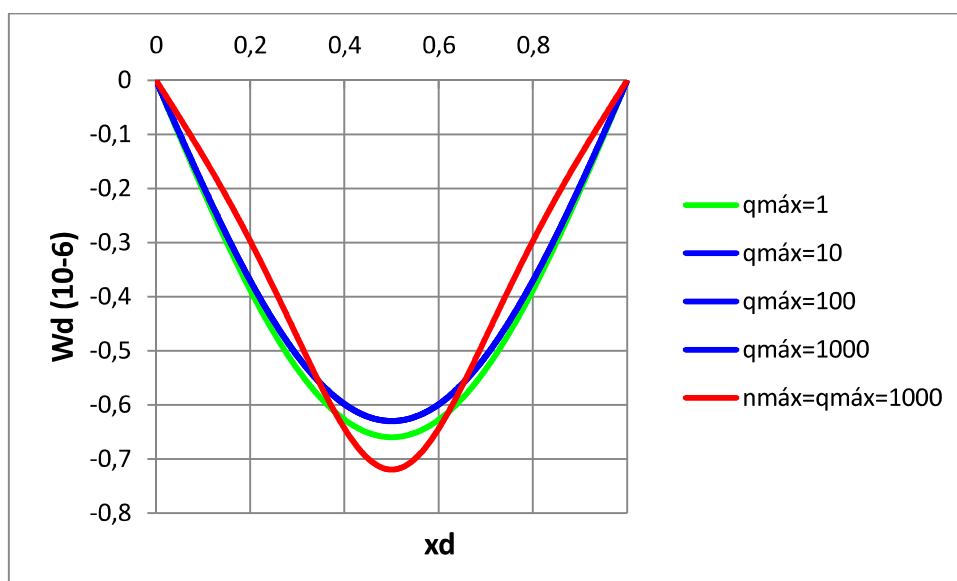


Figura 8 - Solução analítica de w_d versus xd na superfície superior para $n_{máx}$ igual a 1 e $q_{máx}$ variando.



De forma análoga, fixou-se o valor de $q_{\text{máx}}$ igual a 1 e variou-se os valor de $n_{\text{máx}}$. Assim, foram obtidas as Figuras 9 e 10.

Figura 9 - Solução analítica de w_d versus td no ponto central da superfície superior (0,5 a, b) para $q_{\text{máx}}$ igual a 1 e $n_{\text{máx}}$ variando.

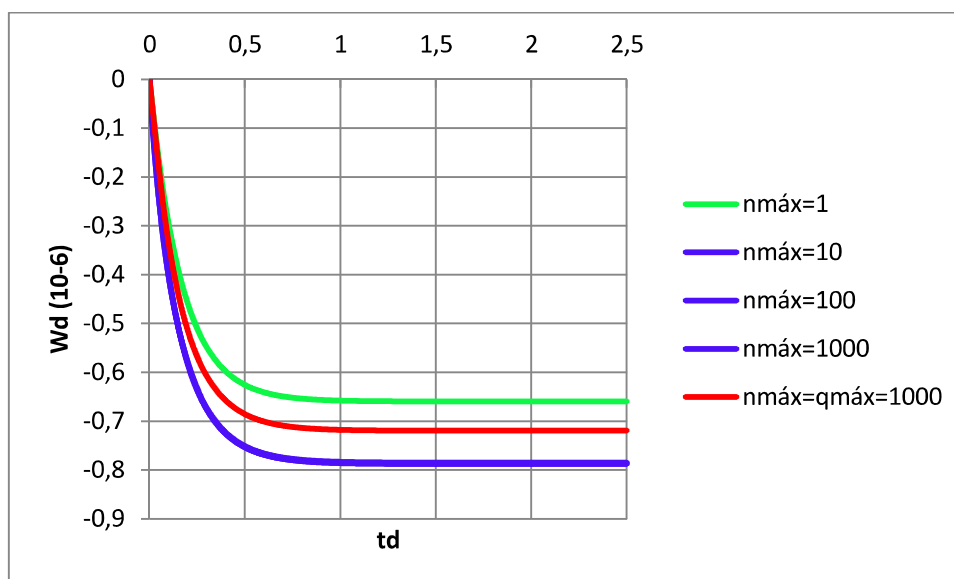
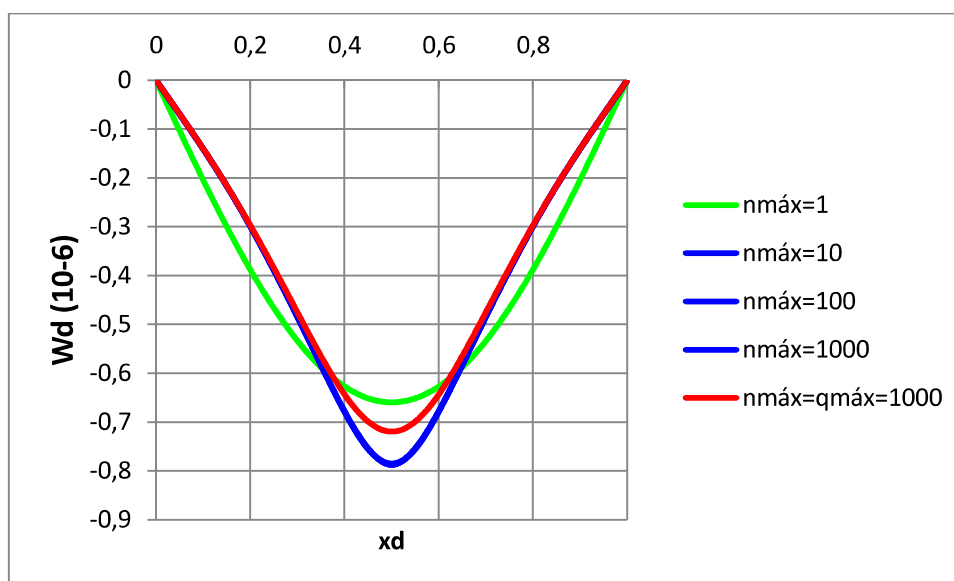


Figura 10 - Solução analítica de w_d versus xd na superfície superior para $q_{\text{máx}}$ igual a 1 e $n_{\text{máx}}$ variando.



Por fim, foram obtidos os resultados da solução analítica variando-se simultaneamente os valores de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$, obtendo-se as seguintes Figuras 11 e 12.

Figura 11 - Solução analítica de w_d versus td no ponto central da superfície superior (0,5 a, b) para $q_{\text{máx}}$ e $n_{\text{máx}}$ variando.

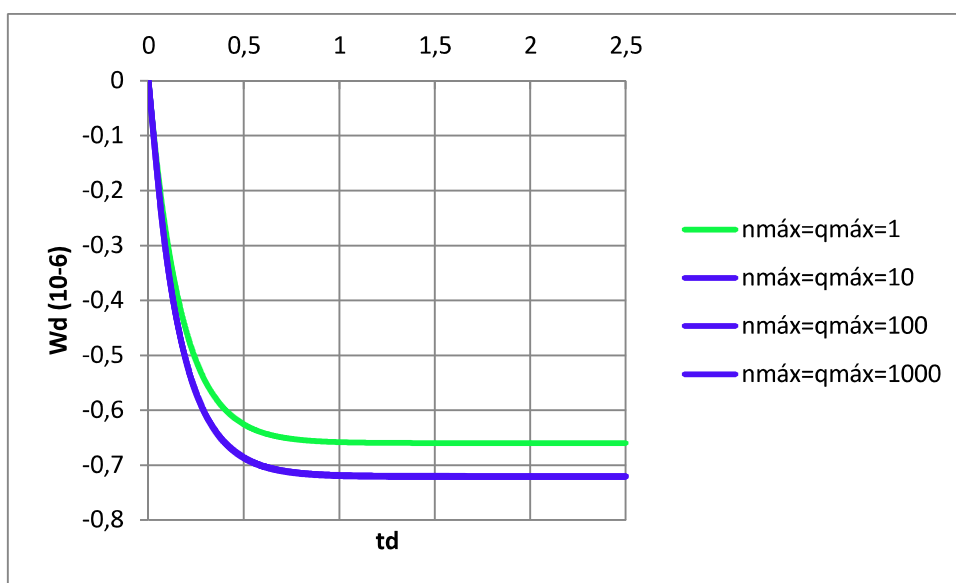
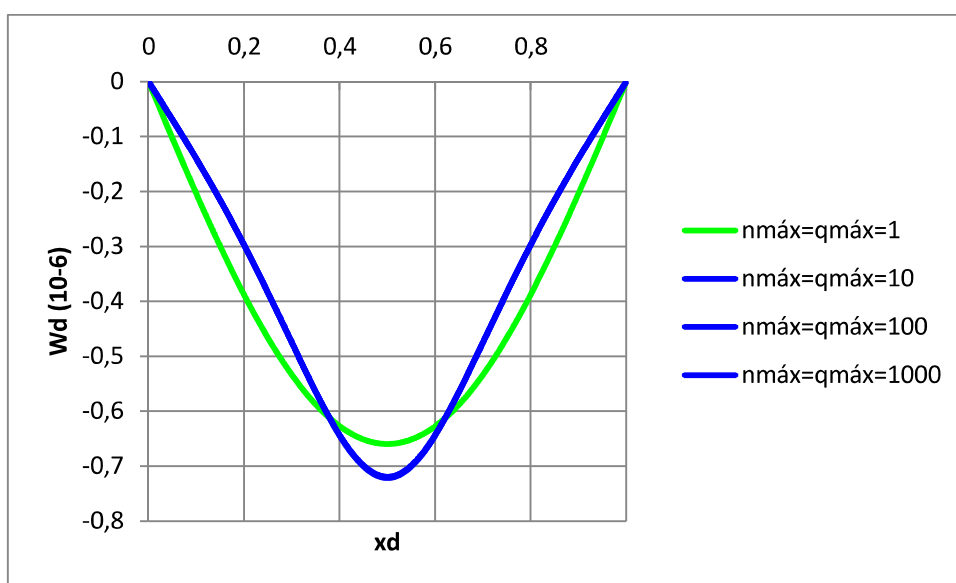


Figura 12 - Solução analítica de w_d versus x_d na superfície superior para $q_{\text{máx}}$ e $n_{\text{máx}}$ variando.



5.3 TEMPO DE EXECUÇÃO E PRECISÃO

Nessa etapa foram obtidos os valores do tempo de execução do código para obtenção da solução analítica e o valor de w_d com precisão de dez casas decimais. O ponto escolhido para estudo foi $x_d=2,5$ do gráfico de Li et al.(2014) exposto na Figura 3, ou seja, o valor de w_d é de, aproximadamente, 0,72 para a solução analítica.

Mantendo-se o valor de $n_{\text{máx}}$ igual a 1 e variando-se $q_{\text{máx}}$ obteve-se os seguintes resultados.

Tabela 2 – Tempo de execução e valor de w_d para n igual a 1.

$q_{\text{máx}}$	Tempo de execução (s)	$W_d (10^{-6})$
1	0,001823	-0,6596743952
10	0,001826	-0,6300484740
10^2	0,001873	-0,6295625585
10^3	0,001992	-0,6295630730
10^4	0,003047	-0,6295630735
10^5	0.014902	-0,6295630735

De forma análoga, manteve-se o valor de $q_{\text{máx}}$ igual a 1 e variou-se $n_{\text{máx}}$, assim se chegou aos seguintes resultados.

Tabela 3 – Tempo de execução e valor de w_d para $q_{\text{máx}}$ igual 1.

$n_{\text{máx}}$	Tempo de execução (s)	$W_d (10^{-6})$
1	0,001823	-0,6596743952
10	0.001831	-0,7850229198
10^2	0.001880	-0,7875949102
10^3	0.002115	-0,7875976543
10^4	0.004619	-0,7875976570
10^5	0.028248	-0,7875976570

Por fim, variou-se simultaneamente os valores de $q_{\text{máx}}$ e $n_{\text{máx}}$, chegando-se aos resultados presentes na Tabela 4.

Tabela 4 – Tempo de execução e valor de w_d para $q_{m\acute{a}x}$ e $n_{m\acute{a}x}$ variando.

$n_{m\acute{a}x}$ e $q_{m\acute{a}x}$	Tempo de execuo (s)	$W_d (10^{-6})$
1	0,001823	-0,6596743952
10	0,002043	-0,7216456262
10^2	0,003394	-0,7195460076
10^3	0,153537	-0,7195680293
10^4	15,084926	-0,7195682496
10^5	1510,29514	-0,7195682518

Para facilitar a visualizao, as casas que sofrem alterao com o aumento de $n_{m\acute{a}x}$ e/ou $q_{m\acute{a}x}$ foram deixadas em vermelho.

6 DISCUSSÃO

6.1 VALIDAÇÃO

Primeiramente, vale a pena destacar que os resultados numéricos de Li et al.(2014) foram muito próximos dos resultados analíticos obtidos no presente trabalho, assim como os resultados analítico do artigo de Li et al.(2014).

Outro ponto importante é que a compatibilidade dos resultados apresentados por Li com os obtidos em MATLAB é bem alta, podendo dessa forma, validar o código e assim seguir para as próximas etapas de teste.

Quanto ao comportamento da curva, apresentada na Figura 5, pode-se inferir que w_d em (0,5a, b) apresenta uma tendência de decaimento exponencial, sendo que os valores começam a ficar estáveis próximos de t_d igual a 1,5. Esse comportamento pode ser explicado pelo efeito de dissipamento no processo de consolidação.

Já na Figura 6, devido ao posicionamento central do ponto e das condições de contorno simétricas, a curva comporta-se de forma simétrica em relação ao ponto com coordenada x_d igual a 0,5.

6.2 ESTUDO DE N E Q

Observando as Figuras 7 e 8, nota-se que ao se manter o valor de $n_{máx}$ fixo em 1 e aumentar o valor de $q_{máx}$, a solução analítica praticamente não se altera para valores de $q_{máx}$ maiores do que 10, sendo que as curvas para $q_{máx}$ igual a 10, 100 e 1000 ficam sobrepostas.

Além disso, os valores obtidos não estão muito próximos do caso ideal (representados pelas linhas vermelhas, onde tanto $q_{máx}$ e $n_{máx}$ possuem valores elevados). Na Figura 7, por exemplo, para t_d igual a 2,5, w_d na linha vermelha possui um valor de aproximadamente -0,72, já para $n_{máx}=1$ e $q_{máx}=10$ ou $q_{máx}=100$

ou $q_{\text{máx}}=1000$, o valor de w_d é próximo a -0,63, possuindo uma diferença de cerca de 12,5%. Podendo-se concluir que um valor de $q_{\text{máx}}$ alto não torna a solução analítica adequada caso o $n_{\text{máx}}$ seja pequeno.

De forma análoga, analisando as Figuras 9 e 10, ao se manter o valor de $q_{\text{máx}}$ igual a 1 e variar o valor de $n_{\text{máx}}$, a solução analítica permanece praticamente constante para $n_{\text{máx}}$ maior que 10, o que pode ser visto pela sobreposição das linhas azuis que representam $n_{\text{máx}}$ igual a 10, 100 e 1000.

Assim como nos casos anteriores, os valores não estão muito próximos das linhas vermelhas, ou seja, se afastam do caso ideal em que tanto $n_{\text{máx}}$ como $q_{\text{máx}}$ possuem valores altos. Pegando como exemplo $t_d=2,5$ da Figura 9, tem-se um valor w_d de, aproximadamente, -0,79 para $q_{\text{máx}}$ igual a 1 e $n_{\text{máx}}$ igual a 10, 100 e 1000. Já para $n_{\text{máx}}=q_{\text{máx}}=1000$ (linha vermelha) esse valor é de -0,72. Possuindo uma diferença de 9,7%, ou seja, um valor alto de $n_{\text{máx}}$ não torna a solução analítica adequada se o valor de $q_{\text{máx}}$ for baixo.

Por fim, observando as Figuras 11 e 12, percebe-se que o valor de w_d praticamente não se altera para valores $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ maiores do que 10, ou seja, fazendo com que os valores de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ sejam iguais ou maiores que 10, já se chega em resultados com um valor adequado para a solução analítica.

6.3 TEMPO DE EXECUÇÃO E PRECISÃO

Observando a Tabela 2, nota-se que o aumento de $q_{\text{máx}}$ com $n_{\text{máx}}$ fixo em 1, gera um aumento do total de casas confirmadas após a virgula, ou seja, aumenta-se a precisão. Contudo como o valor de $n_{\text{máx}}$ é muito baixo a solução analítica fica comprometida como pode ser visto anteriormente. Dessa forma, aumenta-se a precisão mas não tem uma boa exatidão. Além disso, o tempo de execução aumenta pouco, não afetando na performance.

Na Tabela 3, percebe-se uma situação semelhante, onde o tempo de execução não se altera muito, além de haver um aumento da precisão, sem no entanto ganhar em exatidão.

Por último, tem-se a Tabela 4 na qual pode se observar que a partir de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ iguais ou maiores que 10, os valores já tendem para um valor com boa exatidão. Além disso, o aumento contínuo de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ geram valores mais precisos. Por exemplo, para $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ iguais a 10^2 pode-se confirmar 4 casas após a virgula, já para 10^3 confirma-se 6 casas.

Contudo, um ponto que deve ser levado em consideração nesse caso é o tempo de execução do código. Para $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ iguais a 10^3 o tempo de execução é de aproximadamente 0,15 segundos, aumentando-se $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ para 10^4 o tempo passa a ser superior a 15 segundos e ganha-se apenas uma casa de precisão. Na sequência aumentando-se ainda mais, com $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ iguais a 10^5 , o tempo de execução passa a ser 1510 segundo (mais do que 25 minutos)

Dessa forma, pode-se inferir que ao aumentar os valores de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$, obtêm-se resultados mais precisos, no entanto a partir de determinado ponto o tempo de execução começa a ficar bastante alto, já que seu crescimento é exponencial. Devendo-se assim, escolher valores de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ não muito baixos, mas também não muito altos, de forma a se obter valores exatos, com boa precisão e sem tomar um tempo muito alto para execução.

As linhas vermelhas ($n_{\text{máx}}=q_{\text{máx}}=1000$) das Figuras 7 a 10, por exemplo, foram obtidas rapidamente com a geração de 1000 pontos. Caso fosse tentado gerar as mesmas linhas com $n_{\text{máx}}=q_{\text{máx}}=10^5$, o tempo seria de 25.000 minutos (mais de 17 dias).

7 CONCLUSÃO

A partir das pesquisas, pode-se notar que a poroelasticidade tem fundamental importância na indústria de petróleo, particularmente na engenharia de reservatórios. Visto que está diretamente ligada ao fluxo dos fluidos no meio poroso, levando em conta as tensões existentes, fato que merece bastante atenção no ramo petrolífero, uma vez que as tensões envolvidas são bastante elevadas, além da existência de descarregamento das tensões durante a perfuração do poço.

Outro ponto importante que se pode concluir também, é que a obtenção de soluções analíticas para a poroelasticidade são mais diretas e simples do que as soluções numéricas. Além disso, seus resultados possuem uma ótima exatidão, podendo serem usados para a validação de soluções numéricas.

Para as duas situações apresentadas por Li (2014) chegou à conclusão que w_d em função de t_d em (0,5a, b) apresenta uma tendência de decaimento exponencial, uma vez que os valores começam a ficar estáveis próximos de t_d igual a 1,5. Isso pode ser explicado pelo efeito de dissipamento no processo de consolidação. Já para a segunda situação, em que w_d está em função de x_d , devido ao posicionamento central do ponto e das condições de contorno simétricas, a curva comporta-se de forma simétrica em relação ao ponto com coordenada x_d igual a 0,5.

Na equação 78, os valores do somatório se iniciam em n e q iguais à 1 e vão até o infinito, o que é inviável. Devendo-se escolher os valores que n e q atingem com cuidado ($n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$, respectivamente).

Nos estudos ficou evidente que se $n_{\text{máx}}$ ou $q_{\text{máx}}$ for muito baixo, a solução analítica terá sua exatidão prejudicada, devendo-se estabelecer $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ com valores relativamente altos e em função da precisão que se quer alcançar. No entanto, deve-se levar em conta também, o tempo de execução, pois para $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ muito altos pode-se tornar inviável computacionalmente. Sendo que para $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ iguais a 10 já se obtêm resultados com ótima exatidão e baixo custo computacional.

REFERÊNCIAS

ANFLOR, C.T.M. Suzana Moreira Ávila. Otimização aplicado à poroelasticidade dinâmica usando um MEC e AG. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTACIONAL METHODS IN ENGINEERING, 37, 2016, Brasília, ABMEC, 2016.

BIOT, M.A. General theory of three-dimensional consolidation. **Journal of Applied Physics**, v. 12, p. 155-164, 1941.

BIOT, M. A., WILLIS, D. G., 1957, "The elastic coefficients of the theory of consolidation". Journal of Applied Mechanics. Nr. 24. pp. 594-601.

CHAPMAN, S. Programação em MATLAB para engenheiros: 2. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DONALDSON, E. C., DJEBBAR, T. **Theory and Practice of Measuring Reservoir Rock and Fluid Transport Properties**. 2. ed. Burlington: Elsevier, 2004.

FRYDMAN, M. **Iniciação e propagação de fraturas em poços de petróleo**. Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1996, 181p.Tese (Doutorado).

LI, P.et al. Analytical solutions of a finite two-dimensional fluid-saturated poroelastic médium with compressible constituents. **Internacional Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, While Online Library, 38, 24 jan., 2014, p. 1183-1196.

LOPES, D. M. S. **Estudos dos efeitos de Cosserat (microestruturais) acoplados à poroelasticidade de Biot na estabilidade de aberturas circulares em rochas**. Dissertação (Mestrado em Geotecnia) – Núcleo de Geotecnia, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

SILVESTRE, J.R. **Análise numérica de estabilidade de poços de petróleo com relevância a produção de areia**. Rio de Janeiro. Engenharia Civil da PUC-Rio,

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004, 133p. Dissertação (Mestrado).

Terzaghi, K. (1925). "Erdbaumechanik Auf Bodenphysikalischer Grundlage". Deuticke, Leipzig.

TERZAGHI, K., FRÖHLICH O. K. (1936). "*Theorie der Setzung von Tonschichten*" Vienna, Deuticke.



Solução analítica da Teoria da poroelasticidade aplicada ao estudo de reservatórios de petróleo

Leandro de Gois Orchak

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Carrion

Co-Orientador: Prof. Dr. Rafael dos Santos Gioria

Artigo Sumário referente à disciplina PMI1096 – Trabalho de Formatura para Engenharia de Petróleo II
Este artigo foi preparado como requisito para completar o curso de Engenharia de Petróleo na Escola Politécnica da USP.

Resumo

Na engenharia de petróleo, os conhecimentos relativos à área de reservatório são de fundamental importância, uma vez que é o local onde os hidrocarbonetos estão alocados. Além disso, as propriedades do reservatório como porosidade e permeabilidade influem diretamente na produção do óleo. Nesse contexto, uma teoria bastante importante para engenharia de reservatório é a poroelasticidade, que descreve o comportamento acoplado entre os fluidos e sólidos em meios porosos. Em diversas pesquisas a poroelasticidade foi estudada buscando-se soluções numéricas e analíticas. O presente trabalho aborda a poroelasticidade avaliando uma solução analítica, estudando equações de parcela mecânica e de fluxo e a partir dos resultados obtidos, compará-los com trabalho anterior que usou métodos numérico e analítico, avaliando a exatidão do método numérico quando comparado com a solução analítica. Além de estudar melhorias na eficiência da solução analítica, levando em conta tempo e precisão da execução da solução em MATLAB a partir da variação do grau de truncamento da série envolvida.

Abstract

In petroleum engineering, knowledge of the reservoir area is of paramount importance as it is where hydrocarbons are located. In addition, reservoir properties such as porosity and permeability directly influence oil production. In this context, a very important theory for reservoir engineering is poroelasticity, which describes the coupled behavior between fluids and solids in porous media. In several studies, poroelasticity has been studied seeking numerical and analytical solutions. The present work approaches the poroelasticity evaluating an analytical solution, studying mechanical and flow plot equations and from the obtained results, comparing them with previous work that used numerical and analytical methods,

evaluating the accuracy of the numerical method when compared with the solution analytical solution, and study improvements in analytical solution efficiency, taking into account time and accuracy of solution execution in MATLAB from varying the degree of truncation of the series involved.

1. Introdução

A indústria petrolífera vem crescendo cada vez mais no Brasil, principalmente com a descoberta do pré-sal recentemente, sendo que estudos para entender e potencializar a produção tem ganhado cada vez mais importância. Nesse contexto, um dos fenômenos fundamentais que merece ser estudado com cuidado é o fluxo de hidrocarbonetos em meios porosos e a produção desses nos campos de petróleo, onde existe grande necessidade de compreender o comportamento mecânico no meio poroso, que deve levar em conta o comportamento do próprio fluido dentro do espaço poroso.

Nesse ponto entra a Teoria da Poroelasticidade, que é um dos pilares do presente trabalho para o estudo do comportamento de um reservatório de petróleo. Nessa Teoria não são levadas em conta somente as tensões mecânicas, como também a pressão exercida pelo fluido no interior dos poros.

O trabalho aqui desenvolvido busca fazer estudos nessa área, fazendo análises da Teoria da Poroelasticidade em reservatórios de petróleo usando solução analítica, fato que o difere da maior parte dos estudos anteriores nessa área, visto que nesses trabalhos são usados métodos numéricos e não analíticos. Dessa forma, busca-se uma metodologia mais simples, com menor complexidade e que permita respostas mais rápidas e objetivas das equações envolvidas, podendo produzir fundamentos para situações mais complexas. Além disso, a solução analítica é analisada quanto a sua precisão e tempo para obtenção dos seus resultados em função do grau de truncamento da série envolvida.

2. Objetivos

O estudo desenvolvido tem como objetivo principal obter solução analítica da teoria da poroelasticidade em reservatórios de petróleo, tendo como base o artigo de Li et al. (2014). Além disso, o trabalho visa também comparar esses resultados com estudo anterior de Li et al. (2014) onde foram usadas soluções numérica e analítica. Outro objetivo do trabalho é estudar a solução analítica utilizada, transformada finita de Fourier e transformada de Laplace, analisando seus resultados e grau de truncamento da série envolvida (parâmetros n e q).

3. Trabalhos Prévios

A Teoria da Poroelasticidade se fundamenta em estudos relativamente antigos, tendo seu início a partir do trabalho de Terzaghi (1925, apud ANFLOR, 2016). Atualmente essa produção científica pode ser considerada como o começo da mecânica dos solos como novo ramo da ciência na engenharia. Nesse trabalho foi proposto um modelo que introduzia o conceito de tensão efetiva, a fim de descrever o comportamento de solos saturados. Isso pode ser visto na equação a seguir, onde σ é a tensão total, σ' é a tensão efetiva e p é a pressão dos poros.

$$\sigma = \sigma' + p \quad (1)$$

O solo, ao ser solicitado por uma pressão, tem seu volume reduzido devido a três possíveis causas: a saída de fluido dos espaços vazios, compressão dos grãos e compressão dos

fluidos presentes nos vazios. Nesse contexto, Terzaghi (1925, apud FRYDMAN, 1996) e Terzagui e Frolich (1936, apud FRYDMAN, 1996) apresentaram análises do comportamento de uma camada de solo compressível, com condições de deformação unidimensional e fluxo vertical.

Mais tarde, Biot (1941) modificou a definição de tensão efetiva, visto que o volume poroso pode ser alterado com a pressão de incluídos, sendo que a tensão efetiva passou a ter o seguinte formato.

$$\sigma = \sigma' + \alpha \times p \quad (2)$$

Recentemente, Li et al.(2014) propôs um problema onde um meio poroso finito contendo uma possível fonte/sorvedor de massa, ou seja, um poço se localiza em uma posição arbitrária. Esse problema foi resolvido por solução numérica e analítica. Essa última foi discutida em detalhes no trabalho aqui desenvolvido, analisando-se principalmente o grau de truncamento da série contida na solução.

4. Materiais e Métodos

A fim de se obter uma visualização das soluções analíticas e dar suporte nas interpretações, usou-se como ferramenta o MATLAB. Como se trata da busca por soluções analíticas, muitas simplificações devem ser feitas para adequar o modelo sem, no entanto, perder a essência do comportamento físico do problema. As simplificações foram as mesmas adotadas por Li (2014). A partir das hipóteses e simplificações, as equações de Biot se tornam as seguintes:

$$G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon V}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + f_z = 0 \quad (5)$$

Já a equação geral de pressão dos poros no campo é a seguinte:

$$\nabla \cdot \left[\frac{k_f}{\mu_f} (\nabla p - p_f g) \right] + q = \alpha \frac{\partial \varepsilon V}{\partial t} + \left(\frac{\phi}{K_f} + \frac{\alpha - \phi}{K_s} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6)$$

O problema pode ser resumido como um aquífero confinado, saturado e com um ponto, indicando a presença de poço, como pode ser visto na Figura 1. O tamanho da direção y foi supostamente definido como muito maior que as outras duas direções.

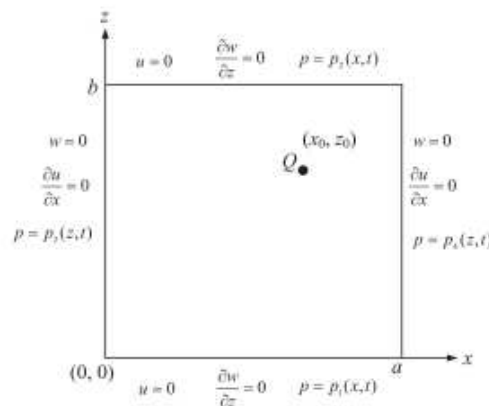


Figura 1 - Meio poroso finito esquematizado com tamanhos a por b.

Foram estabelecidas as condições iniciais e de contorno, além de realizar adaptações nas equações à cima considerando as hipóteses adotadas. Na sequência, baseando-se no artigo de Li (2014) foi feita a solução analítica, utilizando-se transformação finita de Fourier e de Laplace e aplicando inversões triplas nas equações resultantes, chegou-se à:

$$w(x, z, t) = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(n, 0, t) \sin(\lambda_n x) + \frac{4}{ab} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(n, q, t) \sin(\lambda_n x) \cos(\lambda_q z) \quad (7)$$

Onde:

$$\bar{w}(n, q, t) = \frac{a \lambda_q q_0 \sin(\lambda_n x_0) \sin(\lambda_q z_0) (1 - e^{-\frac{G \lambda_f \tilde{\lambda}(m+1)t}{a^2 + G \lambda_f(m+1)/X}})}{G \lambda_f (m+1) \tilde{\lambda}^2} \quad (8)$$

Contudo, os somatórios vão até infinito, o que é inviável no mundo real, assim procurou-se estudar o valor máximo que n e q ($n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$) podem assumir, levando em conta tempo e precisão. Além de comparar os resultados obtidos com as soluções analítica e numérica apresentadas por Li (2014).

5. Resultados

No artigo, Li (2014) expõe em gráficos os resultados analítico e numérico para duas situações envolvendo o problema descrito anteriormente. Na Figura 2, foi plotado os valores de w_d , deslocamento vertical adimensional, no centro da superfície superior ($x=0,5a$, $z=b$) em relação ao tempo adimensional t_d .

Já na Figura 3, o valor de w_d na superfície superior é dado em função da coordenada adimensional x_d . Os valores não dimensionais de w_d , t_d e x_d são dados pelas seguintes equações :

$$x_d = \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$w_d = \frac{w}{b} \quad (10)$$

$$t_d = \lambda_f \frac{(m+1)G}{b^2} t \quad (11)$$

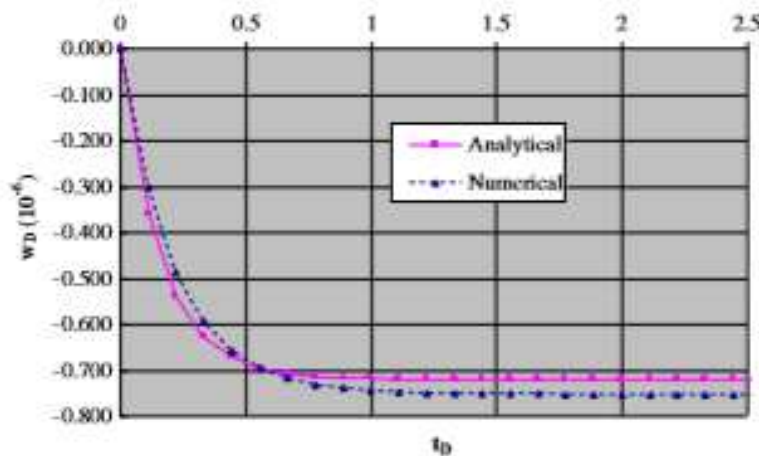


Figure 2 - Curva de w_d versus t_d no ponto central da superfície superior.

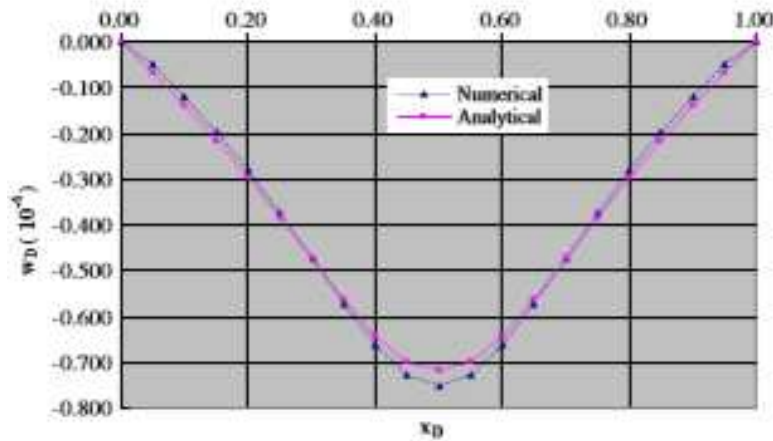


Figure 3 - Curva de w_d versus x_d na superfície superior.

Na sequência foram obtidos os resultados da solução analítica variando-se simultaneamente os valores de $n_{m\acute{a}x}$ e $q_{m\acute{a}x}$, obtendo-se as seguintes Figuras 4 e 5.

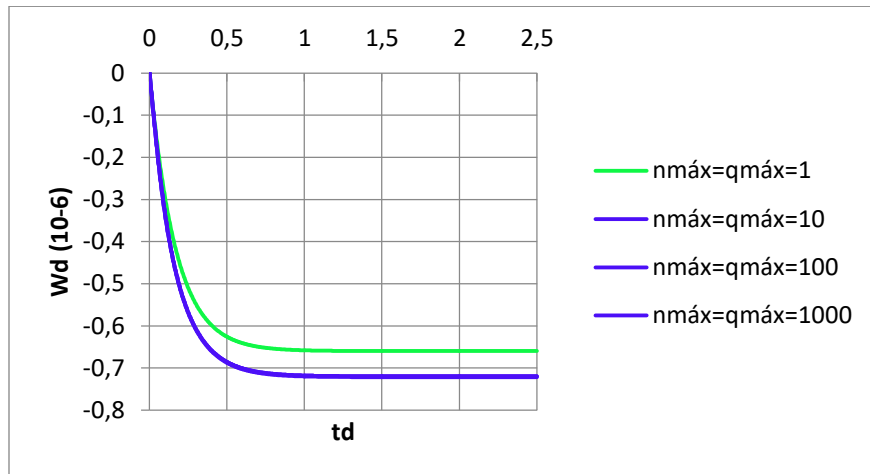


Figure 4 - Solução analítica de w_d versus t_d no ponto central da superfície superior (0,5 a, b) para $q_{m\acute{a}x}$ e $n_{m\acute{a}x}$ variando.

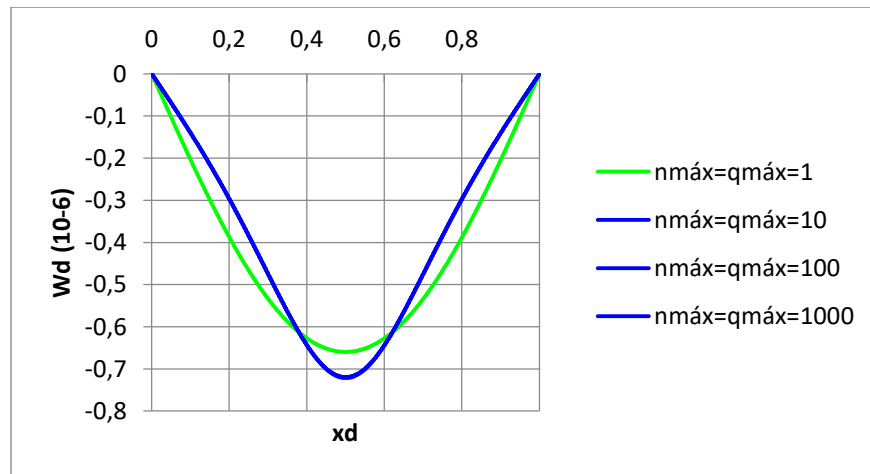


Figure 5 - Solução analítica de w_d versus x_d na superfície superior para $q_{m\acute{a}x}$ e $n_{m\acute{a}x}$ variando.

Como pode ser visto nas Figuras 4 e 5, para $n_{m\acute{a}x}$ e $q_{m\acute{a}x}$ igual ou superior 10, os valores

passam a possuir boa exatidão, sendo que para $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ igual a 10, 100 e 1000 as linhas dos gráficos ficam sobrepostas em ambos os casos e coincidem com os resultados de Li.

Por fim, foram obtidos os valores do tempo de execução do código para obtenção da solução analítica e o valor de w_d com precisão de dez casas decimais. O ponto escolhido para estudo foi $x_d=2,5$ do gráfico de Li (2014) exposto na Figura 2, ou seja, o valor de w_d é de, aproximadamente, - 0,72 para a solução analítica. Variou-se simultaneamente os valores de $q_{\text{máx}}$ e $n_{\text{máx}}$, chegando-se aos resultados presentes na Tabela 1.

Tabela 1 – Tempo de execução e valor de w_d para $q_{\text{máx}}$ e $n_{\text{máx}}$ variando.

$n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$	Tempo de execução (s)	$W_d (10^{-6})$
1	0,001823	-0,6596743952
10	0,002043	-0,7216456262
10^2	0,003394	-0,7195460076
10^3	0,153537	-0,7195680293
10^4	15,084926	-0,7195682496
10^5	1510,29514	-0,7195682518

Pode-se inferir a partir da Tabela 1 que ao aumentar os valores de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$, obtem-se resultados mais precisos, no entanto a partir de determinado ponto o tempo de execução começa a ficar bastante alto, já que seu crescimento é exponencial. Devendo-se assim, escolher valores de $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ não muito baixos, mas também não muito altos, de forma a se obter valores exatos, com boa precisão e sem tomar um tempo muito alto para execução.

6. Conclusões

Para as duas situações apresentadas por Li (2014) chegou-se à conclusão que w_d em função de t_d em (0,5a, b) apresenta uma tendência de decaimento exponencial, uma vez que os valores começam a ficar estáveis próximos de t_d igual a 1,5. Isso pode ser explicado pelo efeito de dissipamento no processo de consolidação. Já para a segunda situação, em que w_d está em função de x_d , devido ao posicionamento central do ponto e das condições de contorno simétricas, a curva comporta-se de forma simétrica em relação ao ponto com coordenada x_d igual a 0,5.

Na equação 7, os valores do somatório se iniciam em n e q iguais à 1 e vão até o infinito, o que é inviável. Necessita-se escolher os valores que n e q atingem com cuidado ($n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$, respectivamente). Devendo, portanto, haver um estudo adequado do grau de truncamento da série.

Nos estudos ficou evidente que se $n_{\text{máx}}$ ou $q_{\text{máx}}$ for muito baixo, a solução analítica terá sua exatidão prejudicada, devendo-se estabelecer $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ com valores relativamente altos e em função da precisão que se quer alcançar. No entanto, deve-se levar em conta também, o tempo de execução, pois para $n_{\text{máx}}$ e $q_{\text{máx}}$ muito altos pode-se tornar inviável computacionalmente.

7. Referências

ANFLOR, C.T.M. Suzana Moreira Ávila. Otimização aplicado à poroelasticidade dinâmica usando um MEC e AG. In: IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTACIONAL METHODS IN ENGINEERING, 37, 2016, Brasília, ABMEC, 2016.

BIOT, M.A. General theory of three-dimensional consolidation. **Journal of Applied Physics**, v. 12, p. 155-164, 1941.

LI, P.et al. Analytical solutions of a finite two-dimensional fluid-saturated poroelastic médium with compressible constituents. **Internacional Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, While Online Library, 38, 24 jan., 2014, p. 1183-1196.

Terzaghi, K. (1925). "Erdbaumechanik Auf Bodenphysykalischer Grundlage".Deuticke, Leipzig.

TERZAGHI, K., FRÖHLICH O. K. (1936). "*Theorie der Setzung von Tonschichten*" Vienna, Deuticke.